Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2011
Quarta Prova

Sistema de Equações Diferenciais

$|A_2 - r_i A_1| = 0$; $[A_2 - r_i A_1]Ci = 0$; $Xp;Yp = -A_2^{-1} B$

Em uma Equação Diferencial do tipo y (x)' + a (x) y(x) = b (x) (onde x é a variável dependente e a(x) e b(x) são funções) a solução vem dada pela seguinte expressão:

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \left[Cte + \int e^{\int a(x)\,dx} b(x)\,dx \right]$$

Em Cálculo de Variações, dada uma função objetivo dada por:

$$\int_0^T F(t, x(t), x'(t))\,dt$$

$$\text{s.a. } (x_0) = x_0 \text{ e } (x_T) = x_T$$

Dadas $F_x = F_{x'}$, as condições de primeira ordem são resultado da Equação de Euler: $F_x = \partial(F_{x'})/\partial t$.

Na Teoria do Controle Ótimo temos que o problema dado por:

$$\int F(t, x(t), x'(t))\,dt$$

$$\text{s.a. } x' = g(x, y, t)$$

s.a. $(x_0) = x_0$ e o ponto final pode adotar diferentes configurações)

onde y = variável de controle e x = variável de estado.

as condições de primeira ordem são dadas por:

$\partial H / \partial y = 0$; $\lambda' = -\partial H / \partial x$; $x' = \partial H / \partial \lambda$

onde H = Hamiltoniano e λ = variável de co-estado;

Questões

1. Mediante o cálculo de variações, resolva o seguinte problema de minimização:

$$\text{Min.} \int_0^T x'^2 \, dt$$

$$\text{s.a. } x(0) = 0 \;;\; x(T) = B$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: $x(t) = (B/T)\, t$

2. Resolva, mediante Cálculo de Variações, o seguinte problema:

$$\text{Min.} \int_0^T [x^2 + c\, x'^2] \, dt$$

$$\text{s.a. } x(0) = x_0 \text{ e } x(T) = 0$$

onde: c é uma constante positiva.

(Não estudamos na aula a resolução de uma equação diferencial do tipo: y''+ a y=0. Contudo, sua solução é extremamente fácil e vem dada pela expressão: $y(t) = A_1 e^{\sqrt{at}} + A_2 e^{-\sqrt{at}}$, onde A_1 e A_2 são constantes que devem ser definidas a partir das informações dadas no problema.

(Esta questão vale três pontos)

Resposta: temos que $\partial F / \partial x = 2x$ e $\partial F / \partial x' = 2cx'$. Introduzindo essas expressões na Euquação de Euler chegamos a: $x'' - (1/c)\, x = 0$. A solução dessa equação A resolução dessa equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes está dada pela dica apresentada no problema está dada pela seguinte expressão:

$$x(t) = A_1 e^{rt} + A_2^{-rt}$$

onde: $r = c^{0.5.}$

Dadas as condições iniciais e finais temos que:

$A_1 = - x_0\, e^{-rT} / (e^{-rT} - e^{-rT})$; $A_2 = x_0\, e^{-rT} / (e^{-rT} - e^{-rT})$

Dessa forma, o resultado final é:

$x(t) = x_0\, e^{-rT} / (e^{-rT} - e^{-rT}) [\ e^{r(T-t)} - e^{-r(T-t)}\ ]$

4. Resolva o seguinte problema de Controle Ótimo:

Max.

$$\text{Max.} \int_0^{20} [4\,k - y^2)\, e^{-0.25\,t}\, dt$$

$$\text{s.a.} \quad k' = -0.25\,k + y$$

$$k(0) = k_0 \text{ e } k(20) \text{ livre}$$

(Esta questão vale cinco pontos)

Resposta:

Variável de Estado:

$k(t) = (k_0 - 16 + 5.33\, e^{-10})\, e^{-0.25\,t} + 16 - 5.33\, e^{0.5t - 10}$

Variável de Controle:

$y(t) = 4\,(1 - e^{0.5\,t - 10})$

Variável de Co-estado:

$\mu(t) = 8\,(1 - e^{0.5\,t - 10})$