Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2013
Quarta Prova

Questões

1. Um banco dispõe de R$ 100 milhões para outorgar créditos beneficiando pessoas físicas e pessoas jurídicas. Suponha que uma normativa do BC determina que, no mínimo, a metade desse montante deve ser direcionado para pessoa física e que 30% do montante direcionado para a pessoa física mais 50% direcionado para empresas não deve ser superior a R$ 35 milhões. Assuma que a taxa de juros para a pessoa física seja de 2% e para pessoa jurídica de 4%.

Perguntas: assumindo que o objetivo do banco seja maximizar a receita pelos juros cobrados, quando alocará para cada segmento (pessoa física e jurídica);

(Esta questão vale 1 ponto)

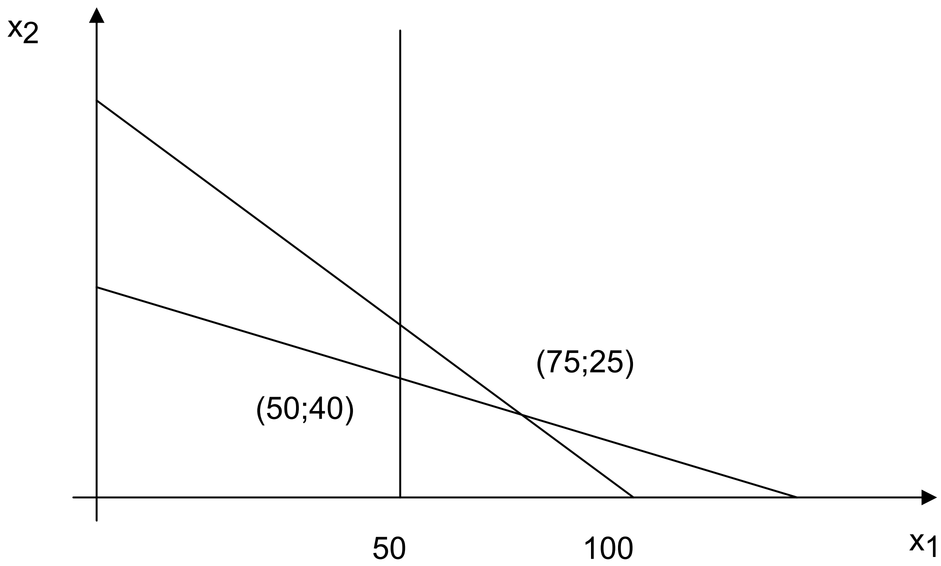
Resposta: o programa a ser trabalhado será:

$$\text{Max } 0.02\, x_1 + 0.04\, x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } \; & x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 \geq 50 \\ & 0.3\, x_1 + 0.5\, x_2 \leq 35 \end{aligned}$$

(onde: x_1 = montante direcionado para pessoa física e x_2 = montante direcionado para pessoa jurídica)

Graficamente, o problema pode ser representado da seguinte forma:



Sendo a resposta (50;40).

2. Uma firma produz dois tipos de vinho, de duas qualidades diferentes. Vamos denominar V_1 e V_2 a esses tipos de vinhos. Os mesmos são produzidos a partir de três tipos diferentes de uvas: U_1 U_2 e U_3. A firma dispõe de um estoque de 36 kg. do primeiro tipo de uva, 25 do segundo e 8 do terceiro. Para obter uma garrafa do vinho V_1, a firma precisa utilizar 6 kg. da uva U1 e 5 da uva U_2. Para produzir uma garrafa do segundo tipo de vinho precisa 6 kg. do primeiro tipo de uva e 4 do terceiro. Por uma questão de mercado, a firma precisa levar ao mercado, como mínimo, a mesma quantidade de unidades de V_1 que de V_2 (em outros termos, a quantidade de unidades de V_1 deve ser igual ou superior à quantidade de unidades de V_2). ao mercado a mesma quantidade de garrafas dos dois tipos de vinhos. No mercado, o preço do vinho V_1 é de R$ 20 e do vinho V_2 de R$ 30. A firma procura maximizar a sua receita total.

Dadas essas informações:

a) formule o programa, represente o problema graficamente e determine a quantidade de vinho V_1 e V_2 que a firma vai produzir; (esta questão vale dois pontos tem que representar graficamente o problema).

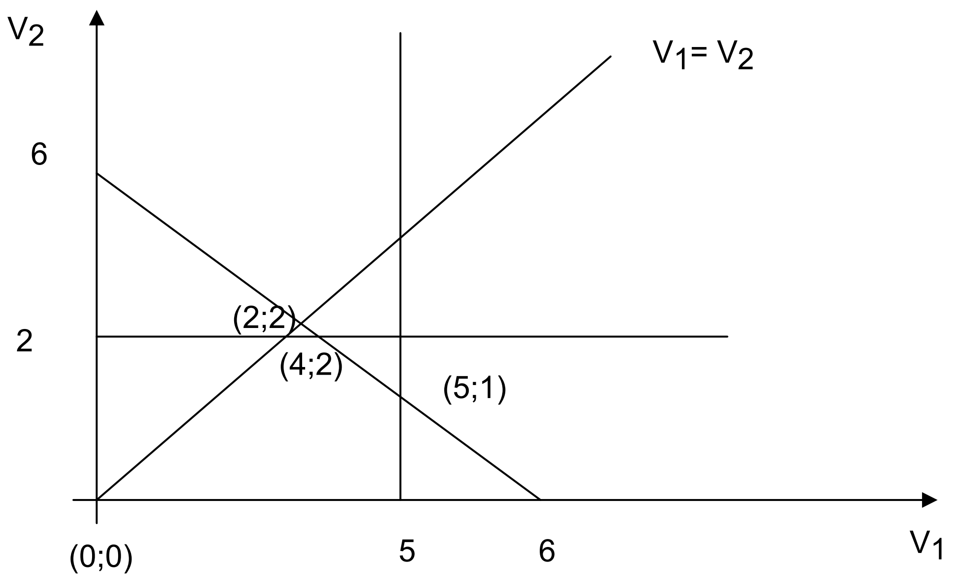
b) sabendo que o preço da uva U_3 no mercado é de R$ 3, a empresa teria interesse em ir ao mercado e comprar a esse preço ? (Esta questão vale três pontos e a resposta tem que estar bem justificada)

Resposta: o programa a ser resolvido é:

$$\text{Max} \quad 20\,V_1 + 30\,V_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } 6\,V_1 + 6\,V_2 &\leq 36 \\ 5\,V_1 &\leq 25 \\ 4\,V_2 &\leq 8 \\ V_1 - V_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Graficamente temos que:



A resposta é (4;2).

Para avaliar se a uva V3 a um preço de R$ 3 no mercado será demandada pela firma temos que avaliar a receita marginal que propiciaria a compra de uma unidade a mais para o estoque da empresa. Lembremos que as variáveis do dual do problema anterior dão justamente essa informação. Com efeito, as variáveis do dual indicam em que medida uma folga na restrição contribui para alterar a função objetivo. No nosso problema temos que, no ponto escolhido (4;2) temos que a segunda e a quarta restrição estão com folga. Então, as variáveis do dual associadas a essas duas restrições serão zero. Dado esse fato, o dual será:

$$\text{Min. } 36u_1 + 8\,u_2$$

$$\text{s.a. } 6\,u_1 \geq 20$$
$$6\,u_1 + 4\,u_2 \geq 30$$

Na resolução desse problema constatamos que $u_2 = 2.5$. Observemos que está associada à terceira restrição do primal (à restrição da uva U_3). Se seu valor é 2.5 o mesmo deve ser interpretado da seguinte forma: aproximadamente uma unidade a mais da Uva 3 vai gerar 2.5 a mais de receita total. Uma vez que o preço dessa unidade é de R$ 3, a firma não comprará a uva.

3. Encontrar, mediante as Condições de K-T, os candidatos que maximizam a seguinte função objetivo e respeitam as duas restrições:

$$\text{Max } U = xy$$
$$\text{s.a. } x+y \leq 100$$
$$x \leq 40$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: a Função Lagrangeana será:

$$\ell = xy - \lambda_1\,(x+y-100) - \lambda_2\,(x-40)$$

As CPO serão:

$$\ell_x = y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$\ell_y = x - \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1\,(x+y-100)=0$$
$$\lambda_2\,(x-40)=0$$

Avaliemos as possíveis alternativas:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Nesse caso x=y=0. É um possível candidato mas a função objetivo será 0;

$\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 = 0$. Nesse caso x=y. Uma vez que $\lambda_1 > 0$, x+y = 100 e x=50, valor que não respeita a restrição $x \leq 40$. Rejeitamos esta alternativa;

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 > 0$. Uma vez que $\lambda_2 > 0$, x deve ser 40. Mas se $\lambda_1 = 0$, por ℓ_y temos que x = 0. Contradição, rejeitamos esta alternativa;

$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Uma vez que $\lambda_2 > 0$, temos que x igual a 40. Uma vez que $\lambda_1 > 0$, temos que x+y = 100. Mas uma vez que x=40 significa que y = 60. Se x=40 temos que $\lambda_1 = 40$ e $\lambda_2 = 20$. Esta alternativa é valida e o valor da função objetivo é maior, obviamente, que no caso de x=y=0.

4. Resolver o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min } 40\,x_1 + 16\,x_2 + 10\,x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_1+x_2+x_3 \geq 100 \\ & 4x_1+x_2 \geq 200 \end{aligned}$$

O aluno deve encontrar os valores de x_1, x_2 e x_3 que minimizem a função objetivo e respeitem as duas restrições.

(Esta questão vale 2 pontos)

Resposta: obviamente, temos que passar pelo dual do problema proposto. O dual desse problema é:

$$\text{Max } 100\,y_1 + 200\,y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & y_1+4y_2 \leq 40 \\ & y_1+y_2 \leq 16 \\ & y_1 \leq 10 \end{aligned}$$

A resposta é (8;8). Assim, a terceira restrição está folgada. Dessa forma, nossa x_3 do primal é igual a zero e a solução do problema será: $x_1 = 33.33$; $x_2 = 66.67$ e $x_3 = 0$.