Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa I
Professor: Carlos Alberto
Período: Verão/07
Provão

Questões

1. Imaginemos que a função de utilidade de uma sociedade pode ser representada pela seguinte expressão:

$$U(C_1, C_2) = \ln C_1 + â \ln C_2 \qquad (1)$$

onde: U = utilidade; C_1= consumo no período 1 e C_2 = consumo no período 2; â é um parâmetro positivo.

Suponhamos que um governo queira maximizar essa função de utilidade e a sociedade tem como horizonte temporal esses dois períodos (ou seja, depois do segundo período essa sociedade acaba).

Além dessa informação sobre a função de utilidade, o governo tem outras duas relações. A primeira diz que a renda (o PIB) no período 1 pode ser alocado entre o consumo ou o investimento. Ou seja:

$$C_1 + I = Y_1 \qquad (2)$$

Esse nível de consumo do primeiro período está dado, é exógeno e o governo não tem controle sobre ele.

Por outra parte, o consumo no período 2 está dado pela seguinte relação:

$$C_2 = I^{á}; \qquad 0 < á < 1 \qquad (3)$$

A variável sobre a qual o governo tem controle é I e a pergunta é: qual é o valor de I que maximiza a função de utilidade ?

(Dicas: substitua as expressões (2) e (3), maximize e depois ponha em evidencia I, que tem que estar em função, exclusivamente, dos parâmetros (á, â) e variáveis exógenas (Y_1). Cuidado, é necessário trabalhar as condições de primeira e segunda ordem).

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: Substituindo as expressões (2) e (3) em (1) vamos ter:

$$U(C_1,C_2) = \ln(Y_1 – I) + â\ á \ln I$$

Derivando com respeito a I temos que:

$$U' = - 1/(Y_1 – I) + â\ á / I = 0$$

Dessa condição de primeira ordem temos que:

$$I = \left[(â\ á) / (1 + â\ á) \right] Y_1$$

A condição de segunda ordem surge da derivação da expressão U' e o sinal será negativo, garantindo que estamos na presencia de um máximo.

2. Imaginemos que um produtor rural possui 1.000 hectares de terra. Ele pode alocar essa quantidade de terra entre dois produtos. Suponhamos que esses produtos sejam milho e soja. Chamemos a quantidade de terra alocada à produção de milho de $_1$ e de $_2$ a quantidade de terra alocada à produção de soja. Por outro lado, o objetivo desse produtor é maximizar lucros e o lucro por unidade de produto é de R$ 10 para o milho e de R$ 8, no caso da soja. A produção por hectare está dado pela função de produção que é $Q_1 = \ _1^{0.6}$ e $Q_2 = \ _2^{0.8}$ para o milho e a soja, respectivamente. A pergunta é: que quantidade de terra esse produtor alocará à produção de milho e soja a fim de maximizar seus lucros.

(A resposta deve ser obtida mediante a Função de Lagrange e tem que ser contempladas as condições de primeira e segunda ordem)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: A Função Lagrangiana será:

$$(\ _1,\ _2, ë) = 10\ _1^{0.6} + 8\ _2^{0.8} – ë(\ _1 + \ _2 - 1.000)$$

Resolvendo (derivando com respeito às variáveis independentes), temos que a quantidade de terra alocada à produção de milho será de 26,6 hectares e de 973,4 no caso da soja. O sinal do Hessiano Orlado (positivo) garante que essa alocação assegura um lucro máximo, respeitando a restrição)

3. Resolva a seguinte integral:

$$x^2 e^x dx$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: $x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c$

4. Dada a seguinte expressão:

$$e^{x^2 + y} - 5 = 0$$

assuma que y (x) e, derivando implicitamente, encontre y' (dy/dx).

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: y' = - 2x

5. Suponha que temos três mercados que são interdependentes (por exemplo, os mercados de café, chá e chocolate). A seguir, estão especificadas as funções de oferta e demanda de cada um deles:

$$Q_{d,1} = 100 - 5 P_1 + 3 P_2 - P_3$$
$$Q_{s,1} = -10 + 2 P_1$$

$$Q_{d,2} = 120 - 8 P_2 + 2 P_1 - 2 P_3$$
$$Q_{s,2} = -20 + 5 P_2$$

$$Q_{d,3} = 300 - 10 P_1 - 5 P_2 - P_3$$
$$Q_{s,3} = 15 P_3$$

Todos os três mercados devem estar em equilíbrio simultâneo. Ou seja, em cada um deles a quantidade ofertada deve ser igual à quantidade demandada. Existe um vetor de preços que faz que, de forma simultânea, esses três mercados estejam em equilíbrio. A pergunta consiste em determinar qual será o valor do preço do bem 2 nesse equilíbrio simultâneo (que, em termos técnicos, se denomina de equilibro geral, supondo que a economia se reduz a esses três mercados).

(Dicas: iguale a oferta e demanda em cada um dos mercados e represente o sistema de forma matricial. Depois, mediante a Regra de Cramer, resolva o sistema para P_2).

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: $P_2 = 14$.

6. Dada uma função y $(x_1;x_2)$, vocês vão estudar em microeconomia que uma das formas de definição da elasticidade substituição é:

$$ó = d \ln (x_2 / x_1) / d \ln (y_{x1} / y_{x2})$$

onde: y_{x1}= derivada parcial de y com respeito a x_1 e y_{x2}= derivada parcial de y com respeito a x_2. Dada a seguinte Função de Produção (Função de Produção Cobb-Douglas):

$$y (x_1;x_2) = A \ x_1^{\ á} \ x_2^{\ â}$$

onde A, â e á são parâmetros positivos.

Dada essa função de produção, calcule a Elasticidade Substituição utilizando a definição dada anteriormente (ou seja, a definição de ó).

(Dicas: primeiro calcule as derivadas parciais, encontre o cociente entre elas, coloque em evidencia x_2 / x_1, aplique logaritmo e derive).

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: ó = 1. A Função Cobb-Douglas é uma CES (Constante Elasticity of Substitution).

7. Encontre, através do Teorema de Euler, o grau de homogeneidade da seguinte função:

$$f (x;y) = x^{0.25} y^{0.75}$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: o grau de homogeneidade é 1.