Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa I
Professor: Carlos Alberto
Período: 1/2013.
Quarta Prova

Questões

1. Dadas as seguintes funções:

$$f(x;y) = \frac{y}{x}; \qquad x(t) = e + e^{t} \qquad ; y(t) = t^{2}+t+1$$

Encontrar df/dt.

(Esta questão vale um ponto. A resposta deve ser encontrada mediante derivadas parciais e não substituindo as funções x(t) e y(t) em f(x;y)).

Resposta: sabemos que:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Assim, a resposta será:

$$\frac{df}{dt} = -x^{-2}y(e^{t}) + x^{-1}(2t+1) = -\frac{e^{t}(t^{2}+t+1)}{(e+e^{t})^{2}} + \frac{(2t+1)}{(e+e^{t})}$$

2. Dada a seguinte função:

$$f(x;y) = x^{3} - y^{4} + 2y^{2} - 3x$$

Determinar os pares de (x;y) que maximizam ou minimizam essa função.

(Esta questão vale três pontos. Tem que ser estudadas as condições de primeira e segunda ordem)

Resposta: igualando a zero as derivadas parciais temos que:

$f_x = 3x2 - 3 = 0$; $f_y = - 4y3 + 4y = 0$

Dessas duas equações deduzimos os seguintes cinco candidatos:

(1;0); (1;1);(1;-1);(-1;0);(-1;-1)

As segundas derivadas são:

$f_{xx} = 6x$; $f_{yy} = -12\ y2 + 4$; $f_{xy} = 0$

Substituindo os candidatos nessas segundas derivadas temos que só três candidatos preenchem as condições para serem máximos/mínimos.

(1;0); fxx (1;0) = 6 >0 ; |H2|=20 >0 → mínimo

(-1;1); fxx (-1;1) = -6 <0 ; |H2|=48 >0 → máximo

(-1;-1); fxx (-1;-1) = -6 <0 ; |H2|=48 >0 → máximo

3. Encontre os valores de x e y que maximizam a função objetivo e que respeitam a restrição:

$$\max_{x,y} \quad 4x^2 + 3xy + 6y^3$$
$$\text{s.a.} \quad x + y = 56$$

(Esta questão vale três pontos e devem ser estudadas as condições de primeira e segunda ordem)

Resposta: construindo o Lagrangiano temos que:

$$\ell\,(x,y,\lambda) = 4x^2 + 3xy + 6y^3 - \lambda\,(x+y-56)$$

Igualando a zero as derivadas parciais temos que:

$$\ell_x = 8x + 3y - \lambda = 0$$
$$\ell y = 3x + 18y^2 - \lambda = 0$$
$$x + y = 56$$

Resolvendo esse sistema temos que: (60;-4) e (52.11;3.89).

O sinal do Hessiano Orlado será:

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 36y \end{vmatrix} =$$

Uma vez que o sinal do Hessiano Orlado é positivo (142>0) no ponto (60;-4) temos um máximo. No candidato (52.11;3.89) o Hessiano tem um valor de aproximadamente -142 e, assim, o ponto é de mínimo.

4. “Dada a função:

$$f(x;y) = (\frac{x^3}{y} + 2xy)e^{\frac{y}{x}}$$

Escolha uma das seguintes afirmações (só uma é correta):

a) a função anterior é homogênea de grau zero, uma vez que $(\frac{x^3}{y} + 2xy)$ é homogênea de grau 2 e $e^{\frac{y}{x}}$ é homogênea de grau zero e 2*0 =0;

b) a função f(x;y) não é homogênea;

c) f(x;y) é homogênea de grau 2.

d) uma vez que f(x;y) é um produto de funções carece de sentido tratar de determinar o grau de homogeneidade;”

(Não precisa justificar a resposta. Simplesmente fazer uma escolha entre as quatro alternativas. No caso de a resposta ser correta ganha um ponto, no caso de ser incorreta perde (desconto) um ponto. No caso de não responder não ganha nem perde pontos).

Resposta: c)

5. Suponha que temos a seguinte função de oferta:

$$Q_S\ (P_1; P_2) = 6\ P_1^{\ 2} - 2\ P_2^{\ 2} - P_1\ P_2$$

onde: Q_S = quantidade oferecida; P_1 = preço do bem oferecido e P_2= é o preço de um outro bem concorrencial.

Demonstre a validade do Teorema de Euler no tocante às elasticidades e homogeneidade para essa função.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: sabemos que o Teorema de Euler no tocante às elasticidades nos diz que, no caso de uma função homogênea, a soma das mesmas é igual ao grau de elasticidade.

Temos que as derivadas parciais de Q_S são:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial P_1} = 12P_1 - P_2 \; ; \; \frac{\partial Q_s}{\partial P_2} = -4P_2 - P_1$$

Sabemos que a definição de elasticidade é: $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$

Dada essa definição e dadas as elasticiades encontradas temos que a soma das elasticidades é:

$$\frac{(12P_1 - P_2)P_1}{6P_1^2 - 2P_2^2 - P_1P_2} + \frac{(-4P_2 - P1)P2}{6P_1^2 - 2P_2^2 - P_1P_2} =$$

$$\frac{12P_1^2 - P_2P_1 - 4P_2^2 - P_2P_1}{6P_1^2 - 2P_2^2 - P_1P_2} = \frac{12P_1^2 - 2P_2P_1 - 4P_2^2}{6P_1^2 - 2P_2^2 - P_1P_2} =$$

$$(2)\frac{6P_1^2 - P_2P_1 - 2P_2^2}{6P_1^2 - 2P_2^2 - P_1P_2} = 2$$

Que seria o mesmo resultado que obteríamos multiplicando cada variável independente em Q_S. Ou seja, provamos que a soma das elasticidades é igual a 2, que é o grau de homogeneidade da Q_S.

.