Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa I
Professor: Carlos Alberto
Período: 1/07
Segunda Prova

Questões

1. Resolver a seguinte integral:

$$\int_0^1 \ln(1 + x^{0.5})\, dx$$

(Dicas: $u = 1 + x^{0.5}$)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: 0.5

2. Imagine um mercado que apresenta as seguintes curvas de oferta e demanda:

$P = 10 – Q^{0.5}$ (Curva de Demanda)

$P = 2Q$ (Curva de Oferta)

O ponto de equilíbrio de um mercado é aquele resultante da combinação de preço e quantidade no qual a oferta e demanda são iguais. Determine o preço e quantidade de equilíbrio e o denominado Excedente do Consumidor nesse ponto.

(O Excedente do Consumidor é aquela utilidade não paga pelo consumidor. Lembrem-se que a utilidade total que um consumidor está dada pela área que se situa embaixo da curva de demanda entre Q=0 e a quantidade consumida. A quantidade paga por um consumidor está dada por P x Q ou o preço pago vezes a quantidade consumida. Dessa forma, a utilidade não paga ou o Excedente do Consumidor está dado pela utilidade total e o montante pago. Lembrem duas coisas. Primeira, que nenhum preço e nenhuma quantidade podem ser negativas. A segunda está vinculada à resolução de uma equação. Lembrar que no caso de encontrar uma equação com um variável $(x)^{0.5}$, podemos apelar a uma variável auxiliar como $u = x^{0.5}$ e a equação pode ser transformada para uma equação de segundo grau corriqueira. Cuidado que, depois, temos que transformar os valores encontrados pela variável auxiliar em valores da variável original)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: igualando oferta e demanda temos uma equação do tipo: $-Q^{0.5} - 2Q + 10 = 0$. Criando uma variável $u = Q^{0.5}$, a equação fica: $-2u^2 - u + 10 = 0$. O resultado de sua resolução é: $u_1 = 2$ e $u_2 = -2.5$. Descartando o valor negativo, temos que $Q = 4$ (lembrar que $Q = u^2$). Quando $Q = 4$, $P = 8$ e a quantidade paga pelo consumidor é de 32, a utilidade total está dada pela área embaixo da curva de demanda entre $Q = 0$ e $Q = 4$. Temos, assim, que a utilidade total será:

$$\int_{0}^{4} (10 - Q^{0.5})\, dQ = \left(10\,Q - Q^{1.5} / 1.5\right) \Big|_{0}^{4} \quad 34,67$$

Como a utilidade paga é de 32 e a utilidade total de 34,67, o excedente do consumidor (utilidade não paga) é de, aproximadamente, 2,67.

3. Dada a função:

$$f(x) = (x^2 - 3x)\, e^{x/3}$$

determine os pontos de inflexão e indique a transição de côncava para convexa ou vice-versa**.**

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: a segunda derivada é: $f''(x) = (1/9\, x^2 - x)\, e^{x/3}$. Os valores que anulam essa expressão são $x_0 = 0$ e $x_1 = -9$. No primeiro caso, a função passa de convexa para côncava e de côncava para convexa no segundo.

4. Dada a seguinte função:

$$F(t) = \int_{0}^{t^2} K(x)\, e^{-á\, x}\, dx$$

encontrar F'.

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: $F' = K(t^2)\; e^{-á\, t^2}\; 2\,t$

5. Agora está muito na moda debater sobre o problema da sustentabilidade na exploração dos recursos naturais. Ou seja, explorar os recursos de forma tal que os mesmos não sejam esgotados. Vamos utilizar as integrais para tratar um problema como esse. Suponhamos que temos um poço de petróleo que tem uma reserva, quando descoberto, de K (ou seja, K é uma constante ou parâmetro, uma vez que representa o estoque inicial). Imaginemos que a trajetória de extração de petróleo possa ser representada pela seguinte função:

$$h(x) = h^* e^{-\acute{a}\, x}$$

onde h* e á são parâmetros e x é uma variável que representa o tempo. Obviamente, a função anterior é decrescente e essa característica reflete o esgotamento progressivo das reservas. A pergunta é: que condição tem que ter os parâmetros antes dados a fim de que esse poço de petróleo nunca seja esgotado ?

(Dicas: primeiro tem que construir uma expressão que represente o estoque remanescente de petróleo em cada momento do tempo. Depois, supor que quando o horizonte de tempo for muito longo (t) o estoque remanescente sempre seja positivo e determinar os parâmetros que garantam essa desigualdade)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: Podemos representar o estoque remanescente 0 em cada momento do tempo pela seguinte função:

$$S(t) = K - \;_{0}^{t}\; h^* e^{-\acute{a}\, x}\, dx$$

Resolvendo essa integral temos que: $S(t) = K - h^* (1-e^{-\acute{a}\, t})/ \acute{a}$. Quando t , $e^{-\acute{a}\, t}$ 0. Então, para que S>0, temos que $K > h^*/ \acute{a}$.

6. A resolução de equações diferenciais é hoje uma técnica crucial para qualquer economista. Basicamente, uma equação diferencial é uma equação na qual a incógnita é uma função e na expressão aparece uma derivada dessa função. Por exemplo, uma equação diferencial é:

$$y' + a\, y = b \qquad (1)$$

onde a e b são parâmetros (a 0) e y é uma função que depende de outra variável (por exemplo x). A questão é encontrar a expressão de y (x) que satisfaça a igualdade anterior. Vocês vão estudar em Quanti II (ou a disciplina

Equações Diferenciais, do Departamento de Matemática) que a solução para a equação anterior é:

$$y\ (x) = A\ e^{-\ ax} + (b/a) \qquad (2)$$

onde A é um parâmetro e a e b, como já afirmamos, também são parâmetros.

A questão que vocês têm que responder é: provar que a expressão (2) é uma solução de (1).

(Dicas: percebam que a expressão (1) pode ser reescrita como:

$$(dy/dx) + a\ y = b \qquad (3)$$

multiplicando (3) por dx temos que:

$$dy + a\ y\ dx = bdx \text{ ou } dy = (b - ay)\ dx \qquad (4)$$

rearranjando os termos temos que:

$$dy\ /\ (b\text{-}ay) = dx \qquad (5)$$

agora integrem as duas partes da igualdade e coloquem em evidencia y)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: a partir de (5) temos que:

$$dy\ /\ (b\text{-}ay) = \quad dx$$

resolvendo essas integrais temos que:

$$-\ \ln\ (\ b - ay)\ /\ a = x + cte \text{ ou } \qquad \ln\ (b\text{-}ay)\ /\ a = -x + cte.$$

trabalhando a expressão anterior :

$$b - ay = e^{-a\ x\ +\ cte} = e^{-x}\ cte \text{ (uma vez que } e^{cte} = cte)$$

colocando em evidencia y:

$$-y = (e^{-ax}\ cte)\ /a - (b/a)$$

multiplicando ambas parte da igualdade por (-1) e percebendo que (-1) * cte = cte:

$$y = e^{-ax} \text{cte} + (b/a)$$

que é a expressão que queríamos provar.