

Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa I
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2012.
Terceira Prova

Questões

1. Dada a seguinte matriz A , provar que os autovalores de A e os autovalores de A^T coincidem (essa é uma das propriedades dos autovalores).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: Os auto-valores de A e A^T são: -3, 1, 4. Em realidade, uma vez que $A = A^T$, neste caso particular nem precisa calcular os auto-valores de A^T , necessariamente serão os mesmos.

2. Os autovetores de A e de A^{-1} são os mesmos. Provar esta propriedade dos autovetores para a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: No caso da matriz A , seus auto-valores são: -3 e 2. O auto-vetor associado ao auto-valor -3 é $x_1 = x_2$. O auto-vetor associado ao auto-valor 2 é $-4x_1 = x_2$. A matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Os auto-valores dessa matriz são: $-1/3$ e $-1/6$. O auto-vetor associado a $-1/3$ é $x_1 = x_2$ e auto-vetor associado a $-1/6$ é $-4x_1 = x_2$.

3. Assuma o seguinte fluxo entre setores:

	Demanda Intermediária		Produção
	Agricultura	Indústria	Total
Agricultura	60	64	200
Indústria	100	48	160

Dada essas informações, o governo estima que, daqui a cinco anos, a demanda final na agricultura será de 70 e da indústria de 60. Pergunta: qual deverá ser a produção total da agricultura e da indústria para satisfazer essa demanda final.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: dado o fluxo mencionado na pergunta, a matriz-insumo produto **A** será:

$$A = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.40 \\ 0.50 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Então,

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 70 & 40 \\ 50 & 70 \end{bmatrix}$$

Dada a nova demanda final (70;60), a produção total deverá ser (252;265).

4. Questão da ANPEC/2012:

“ Se $A^2 + A = I$, então $A^{-1} = A + I$ “ (onde I é a matriz identidade)

Verdadeiro ou Falso ?

((Não precisa justificar a resposta. Simplesmente dizer se é Falso ou Verdadeiro. No caso da resposta ser correta ganha um ponto, no caso de ser incorreta perde (desconto) um ponto. No caso de não responder não ganha nem perde pontos).

Resposta: verdadeiro.

5. Resolva o seguinte sistema de equações mediante a matriz inversa:

$$\begin{aligned}x-3y &= 7 \\ -3x+1 &= -4y\end{aligned}$$

(Esta questão vale dois pontos e a resposta só será considerada no caso de ter sido obtida mediante a utilização da matriz inversa)

Resposta: a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

A inversa é:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $A^{-1} * B$ temos obtemos: $x = -5$ e $y = -4$.

6. Dada a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.15 \\ 0.2 & \alpha \end{bmatrix}$$

Determine o intervalo de valores de α para que A seja produtiva.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: A partir de A podemos calcular $(I-A)^{-1}$, que será:

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0.2 \\ 0.15 & 0.7 \end{bmatrix}$$

De onde se deduz que para que A seja produtiva $\alpha \leq 1$.