**Universidade de Brasília**
**Departamento de Economia**
**Disciplina: Economia Quantitativa II**
**Professor: Carlos Alberto**
**Período: 2/09**
**Primeira Prova**

**Questões**

**Lembremos que a solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem (primeira ordem significa que só tem uma primeira derivada) e ordinária (uma equação diferencial ordinária é aquela na qual a função em questão só tem uma variável) do tipo: y (x)' + a (x) y(x) = b (x) (onde x é a variável dependente e a(x) e b(x) são funções) é:**

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \left[ Cte + \int e^{\int a(x)\,dx}\, b(x)\,dx \right]$$

**Lembremos, também, que a Equação de Bernoulli nos diz que, dada uma equação diferencial do tipo:**

$$y(x)' + y(x)\,a(x) = b(x)\,y^{n}$$

**podemos trabalhar com uma função auxiliar $z = y^{-n+1}$ e reduzimos a equação anterior a uma equação diferencial linear do tipo:**

$$z(x)' - (n-1)\,z(x)\,a(x) = -(n-1)\,b(x)$$

**depois é só encontar y (x) a partir do resultado encontrado para z e da definição de z.**

**1.** Resolver, mediante a separação de variáveis, a seguinte equação diferencial:

$$x^{2}\,y\,dx - (1+x^{3})\,dy = 0 \;; \quad x = 1;\ y = 2$$

(Esta questão vale um ponto e só serão consideradas válidas as respostas obtidas mediante separação de variáveis)

Resposta: $y(x) = 1.5874\,(1 + x^{3})^{1/3}$

**2.** Resolver a seguinte equação diferencial:

$$(y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0$$

(Esta questão vale dois pontos. Como é uma equação não linear em y, tem que utilizar Bernoulli).

Resposta: $y(x) = x\,(\ln x + Cte.)^{-1}$.

**3.** Resolver a seguinte equação diferencial:

$$(y'/x) + 2\,y - 4 = 0$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: $y(x) = 2 + Cte.\, e^{-x^2}$

**4.** O crescimento demográfico pode ser definido a partir de quatro variáveis: mortalidade, natalidade, emigrações e inmigrações. Imaginemos que estamos trabalhando no período de um ano ($\Delta t$ = um ano). Nesse caso, temos que a variação da população (p) pode ser definida como:

$$\Delta p = N\text{-}M - E + I$$

Onde: M = mortalidade; N = natalidade; E = emigração e I = Imogração.

Podemos definir M como sendo: $M = m\, p\, \Delta t$, onde m = taxa de mortalidade. Da mesma forma temos que $N = n\, p\, \Delta t$, sendo n a taxa de natalidade. Supondo, para simplificar a álgebra, que o fluxo migratório está compensado entre imigrações e emigrações, temos que:

$$\Delta p = n\, p\, \Delta t - m\, p\, \Delta t$$

Dividindo todo por $\Delta t$ e supondo que $\Delta t \to 0$, temos que:

$$p' = (n\text{-}m)\, p$$

Resolva essa equação diferencial e, a partir da resposta obtida, calcule a taxa de variação da população.

(Esta questão vale dois pontos e todas as respostas têm que estar justificadas)

Resposta: $p(t) = Cte.\, e^{(n-m)t}$ e a taxa de variação da população é n-m e surge de derivar o ln p(t) com respeito a t.

**5.** Suponha uma função y(x). Se sabemos que dlny ⁄ dlnx é de 3, determine a elasticidade dessa função.

(Esta questão vale um ponto).

Resposta: a elasticiade é 3.

**6.** Suponha que a elasticidade (ξ) de uma função y(x) seja:

$$\xi_{y,x} = (-4x^2) / (18 - 2x^2)$$

Determine a função y(x).

(Esta questão vale dois pontos. A resposta deve ser obtida mediante a resolução de uma equação diferencial. A fins de determinar a constante suponha que x=0 ; y = 18)

Resposta: $y(x) = 18 - 2x^2$

**7.** Dada a seguinte equação diferencial:

$$y' = 3y^2 + 1$$

Determine o ponto de equilíbrio.

(Esta questão vale um ponto).

Resposta: não tem ponto de equilíbrio, um vez que y' sempre vai ser diferente de zero (o termo $3y^2$ nunca pode ser -1)