Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/02
Primeira Prova

Questões

1. Encontrar o diferencial total da seguinte função: $z(x;y) = x^4 + 8\,xy + 3\,y^3$

(Esta questão vale 0.5 ponto)

Resposta

Dado z (x;y), o diferencial é: $dz = (\partial z / \partial x)\, dx + (\partial z / \partial y)\, dy$. Assim, a resposta da questão é: $dz = (4\,x^3 + 8\,y)\, dx + (8\,x + 9\,y^2)\, dy$.

2. Imagine uma função linear, por exemplo, y =a + b x. Qual deve ser o valor do parâmetro a para que elasticidade de y com respeito a x seja igual a 1 ?

(Esta questão vale um ponto)

Resposta.

A elasticidade dessa função linear é: $\xi_{y,x} = (b\ x) / a + bx$. Para que a elasticidade seja 1 em qualquer ponto, a deve ser igual a zero (a =0).

3. Imagine que a trajetória do preço (P) está em função do tempo (t), podendo essa relação ser expressa mediante a seguinte função: $P(t) = 4\,e^{0.05\,t}$. Qual é a taxa de crescimento do preço no tempo ?

(A resposta deve ser obtida a partir de logaritmos e só serão consideradas as respostas que sejam obtidas dessa forma. Esta questão vale um ponto)

Resposta.

Sabemos que a taxa de variação de uma função é igual ao quociente da derivada sobre a função original. A derivada de P (t) é; $P' = 4\,e^{0.05\,t}(0.05)$. Assim, a taxa de variação será 0.05 (P´ / P) ou 5%.

Mas como a resposta devia ser derivando logaritmos, aplicamos logaritmo à P e fica: ln P (t) = ln 4 + 0.05 t ln e = ln 4 + 0.05 t (dado que ln e = 1). A taxa de variação se obtém derivando ln P com respeito a t (d ln p/ dt). Assim, obtemos o 5% antes mencionado. Só contarão pontos as respostas que foram obtidas mediante logaritmos.

4. Imagine que a elasticidade de uma função y (x) é de 3, qual é a taxa de variação ?

(Esta questão vale um ponto)

Resposta.

Sabemos que a elasticidade é igual à taxa de variação vezes a variável independente. Assim, se a elasticidade é de 3, a taxa de variação será 3/x.

5. Imagine o seguinte problema de maximização condicionada:

$$\text{Max. } 4x + y - x^2$$

$$\text{s.a. } 2x + y \leq 5$$

$$-2x + y \geq 3$$

$$x \geq 0$$

$$-y \leq 0$$

O ponto: $x = 1$; $y = 3$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_4 = 0$ é um candidato a máximo.

(Justificar a resposta)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta.

Para testar esse ponto primeiro temos que encontrar as condições de K-T.

O lagrangiano do problema anterior é:

$$L = 4x + y - x^2 - \lambda_1 (2x + y - 5) - \lambda_2 (2x - y - 3) + \lambda_3 x + \lambda_4 y$$

As condições de K-T são:

$L_x = 4 - 2x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (1)

$L_y = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0$ (2)

$\lambda_1 (2x + y - 5) = 0$ (3)

$\lambda_2 (2x - y - 3) = 0$ (4)

$\lambda_3 \; x = 0$ (5)

$\lambda_4 \; y = 0$ (6)

Substituindo os valores dados nessas seis igualdades vemos que não encontramos contradições ou inconsistências e, assim, preenchem os requisitos. Por tanto, a resposta é afirmativa: esse ponto é candidato a máximo.

6. Imagine o seguinte problema. Um consumidor tem por objetivo maximizar a sua função de utilidade que está dada por: $U(x;y) = (x + y)^2$, onde: U = utilidade e x;y são dois bens. Suponha que o preço de x é igual a 1 e o preço de y igual a 2. O salário desse indivíduo é de R$ 8.

Perguntas: a) trate de resolver esse problema mediante Lagrange (esta questão vale 0.5 ponto); b) formule o problema mediante Kuhn-Tucker e encontre os candidatos (esta questão vale dois pontos); c) porque o método de Lagrange não permitia obter um resultado ? (esta questão vale um ponto).

Resposta.

a) Resolvendo por Lagrange vamos ter:

$$\text{Max. } U(x;y) = (x + y)^2$$

$$\text{s.a. } x + 2y = 8$$

$L = (x + y)^2 - \lambda (x + 2y - 8)$

$L_x = 2(x + y) - \lambda = 0$ (1)

$L_y = 2(x + y) - 2\lambda = 0$ (2)

$(x + 2 y – 8) = 0$ (3)

O sistema formado pelas igualdades (1), (2) e (3) é claramente inconsistente. Por exemplo, de (1) $\lambda = (x+y)/2$ e de (2) $\lambda = (x+y)$.

b) Vamos a formular o problema em termos de K-T. Temos que:

$$\text{Max. } U(x;y) = (x + y)^2$$

$$\text{s.a. } x + 2y \leq 8$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

O lagrangiano será:

$$L = (x + y)^2 - \lambda_1 (x + 2y - 8) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

As condições de K-T serão:

$L_x = 2 (x + y) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (1)

$L_y = 2 (x + y) - 2 \lambda_1 + \lambda_3 = 0$ (2)

$\lambda_1 (x + 2 y - 8) = 0$ (3)

$\lambda_2 x = 0$ (4)

$\lambda_3 y = 0$ (5)

Devemos explorar 8 alternativas ($2^3 = 8$)

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Neste caso temos que $x = y = 0$, mas certamente esse ponto não maximiza a função objetivo.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 > 0$

Este caso temos uma contradição. Com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, temos que $x = y = 0$ (pela igualdade (1)). Contudo, pela igualdade (2) o terceiro multiplicador é positivo, o que contradiz o suposto de $\lambda_3 > 0$. Assim, descartamos esta alternativa.

(c) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 > 0$

Podemos descartar esta alternativa da seguinte forma. De (1), com o primeiro multiplicador igual a zero temos que $\lambda_2 = -2(x + y)$. Como x e y tem que ser positivos, o multiplicador será negativo, coisa que não pode.

(d) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$

Outra vez, por (2), temos que se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ isso implica em que $x = y = 0$, ponto que não maximiza a função de utilidade.

(e) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$

No caso de $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ estamos no caso de lagrange já analisado anteriormente e que não tem solução. Com efeito, de (1) e (2) temos que $\lambda_1 = (x+y)/2$ e de (2) $\lambda_2 = (x+y)$.

(f) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$

A análise de esta alternativa é um pouco mais complexa. Como o segundo multiplicador é maior que zero, $x = 0$. Como o primeiro multiplicador é maior que zero, a restrição orçamentária tem que ser igual a zero. Mas, como $x = 0$, para que a restrição orçamentária seja zero $y = 4$. Vamos agora para (3) (a derivada do Lagrangiano com respeito a y). Neste caso, como o terceiro multiplicador é igual a zero e $x = 0$ e $y = 4$, temos que, por (2), o primeiro multiplicador é igual a 4. Contudo, por (1), se $x = 0$ e $y = 4$, o primeiro multiplicador é 8. Contradição, e descartamos esta possibilidade.

(g) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 > 0$

Se o terceiro multiplicador é positivo, $y = 0$. Como o primeiro multiplicador é positivo, a restrição orçamentária não pode ter folga e, como $y = 0$, temos que $x = 8$. De (1), como $x = 8$, $y = 0$ e $\lambda_2 = 0$, temos que o primeiro multiplicador é 16. Mas si o $x = 8$ e $\lambda_1 = 16$, temos que $\lambda_3 = 32$ (por (2)). O ponto $x = 8$; $y = 0$; $\lambda_1 = 16$; $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 32$ é um candidato.

(h) $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 > 0$

Aqui estamos outra vez no caso de x = y = 0, dado que os dois últimos multiplicadores são zero. Esses valores não maximizam.

Ou seja, o único candidato a máximo é $x = 8$; $y = 0$; $\lambda_1 = 16$; $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 32$.

(c) O método de Lagrange não permitiu atingir o resultado dado que essa é uma solução de "canto". Só é consumido um bem. Nesses casos só mediante K-T podemos obter um resultado.

7. Imagine o seguinte problema de maximização:

$$\text{Max.} -(x-4)^2 - (y-4)^2$$

$$\text{s.a.} \quad x + y \leq 4$$

$$x + 3y \leq 9$$

Os valores de x e de y do candidato a máximo é: 2 e 2. Os valores dos multiplicadores associados às duas restrições podem ser $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 = 1.5$. Qual das alternativas para o valor dos multiplicadores é correta? Justifique a sua resposta.

(Esta questão vale um ponto)

Resposta

Se $x = y = 2$, a segunda restrição está folgada e, assim, o multiplicador a ela associado deve ser zero ($\lambda_2 = 0$). Como a primeira restrição não está com folga, $\lambda_1 = 4$.