Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Quarta Prova
Período: 1/2011

Questões

1. Imagine que o preço do bem que uma firma produz seja R$ 1. Sua função de produção é dada por: $Q = K – a K^2$. Denominemos de δ a taxa de depreciação. Dessa forma, a variação do capital (o único fator de produção) será dada por: $K' = I – \delta K$, onde I é o investimento. Suponhamos que a função de custos (dada unicamente pelo custo do capital, o único fator de produção) pode ser representada por $C = I^2$. A expressão para os lucros (π) será dada por: $\pi = K – a K^2 - I^2$. Temos, assim, um problema de maximização (maximização dos lucros) em um período de tempo entre t_0 e t_1 sujeito a uma restrição dada por: $K' = I – \delta K$ e partindo de um ponto onde $K(0) = K_0$.

(Esta questão vale três pontos e não é preciso determinar os valores dos k_i)

Resposta: o programa a ser resolvido é o seguinte:

$$\text{Max} \quad \pi = \int_0^t (K – a K^2 - I^2)\, dt$$

$$\text{s.a.} \qquad K' = I – \delta K$$

$$K(0) = K_0 \; ; \; \Lambda (T) = 0$$

No caso de trabalhar com as expressões em abstrato, os resultados são:

$$\lambda (t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} + \lambda^*$$

$$K(t) = (r_1 - \delta /2a)\, k_1 e^{r_1 t} – (r_2 - \delta /2a)\, k_2 e^{r_2 t} + K^*$$

$$I(t) = \lambda (t) /2$$

No caso de δ = 0.2 e a=4, como sugeri na aula, as funções que maximizam o Hamiltoniano são:

$$\lambda (t) = k_1 e^{2.01\, t} + k_2 e^{-2.01\, t} + 0.5$$

$K(t) = 0.23\, k_1\, e^{2.01\, t} - 0.28\, k_2\, e^{-2.01\, t} + 0.1238$

$I(t) = (k_1\, e^{2.01\, t} + k_2\, e^{-2.01\, t} + 0.5) / 2$

(As raízes do sistema de equações diferenciais são: +2.01 e -2.01)

2. Resolva o seguinte problema de controle ótimo:

$$\underset{u(t)}{\text{Max}} \int (x(t) + u(t))\, dt$$

$$\text{s.a. } x' = 1 - u(t)^2$$

$$x(0) = 1$$

(Esta questão vale dois pontos e a resposta não pode ter constantes em aberto)

Resposta:

$u(t) = 1 / (2(1-t))$

$x(t) = t = (1/ (4(1-t))) + 1.25$

$\lambda(t) = (1-t)$

3. Um problema de cálculo de variações. Otimize a seguinte função:

$$\int_{t_0}^{t_1} (3\, x'^2 / 8\, t^3) dt$$

$$x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: $x(t) = c_1/3\, t^4 + c_2/3$

4. Para um economista, é muito importante saber como resolver um problema já colocado em termos matemáticos e desenvolver matematicamente um problema dado. Esta questão consiste que você formule matematicamente o problema a seguir.

Suponha que uma firma ganhou a concessão da exploração de um poço de petróleo em uma bacia. O objetivo dela é maximizar seu lucro no período de concessão. O período inicial é hoje (vamos denominar de t_0) e o período final é T. O preço de petróleo extraído é de P e constante no período de concessão (foi fixado antecipadamente pelo setor público). Vamos denominar de x(t) o estoque de petróleo no poço a cada momento do tempo t. O objetivo da firma é maximizar lucro entre 0 e T, então não importa para ela o estoque de petróleo além de T. Vamos denominar de u(t) a extração de petróleo a cada momento t. Vamos supor, também, que os custos da firma, em cada momento t, assume uma a seguinte função: $u(t)^2 / x(t)$.

A questão é: formule o problema (em termos contínuos, logicamente) e apresente as condições de primeira ordem (não precisa resolver as equações diferenciais, só indicar as mesmas).

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: o problema pode ser colocado nos seguintes termos:

$$\max_{u(t)} \quad \pi = \int_0^T \left[P\, u(t) - u(t)^2 / x(t)\right] dt$$

$$\text{s.a.} \quad -x'(t) = u(t)$$

$$x(0) = x0 \; ; \; \lambda(T) = 0$$

O Hamiltoniano é:

$$H = P\, u(t) - u(t)^2 / x(t) - \lambda(t)\, u(t)$$

As condições de primeira ordem serão:

$$\partial H/\partial u = P\, u(t) - 2\left[u(t) / x(t)\right] - \lambda = 0$$

$$\lambda' = u(t)^2 / x(t)^2$$

$$x(t)' = -u(t)$$

5. A formulação da primeira questão desta prova poderia ser conceitualmente "melhorada". Melhore a questão e coloque em termos matemáticos (não precisa resolver o problema, só reformular o problema e escrever em termos matemáticos).

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: em realidade, uma vez que estamos falando de um problema intertemporal, teríamos que trabalhar com valor presente. Dessa forma, a função a ser maximizada seria:

Max $\pi = \int_0^t (K - a K^2 - I^2)\, e^{-it}\, dt$; onde: I é a taxa de desconto.

Lembretes:

Sistemas de Equações Diferenciais: $|A_2 - r A_1| = 0$; $|A_2 - r_i A_1| C_i = 0$; $-|A_2|^{-1}$ B=solução particular. Sempre façam $C_1 = 1$ em todas as raízes.

Calculo de Variações:

a) F_x ; $F_{x'}$

b) Equação de Euler: $F_x = d(F_{x'})/ dt$;

Controle Ótimo:

a) $\partial H/\partial y = 0$

b) $\lambda' = - \partial H/\partial x$; $x' = \partial H/\partial \lambda$