Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2011
Terceira Prova

Sistema de Equações Diferenciais

$$|A_2 - r_i A_1| = 0 \; ; \; [A_2 - r_i A_1]Ci = 0 \; ; \; Xp;Yp = -A_2^{-1} B$$

Sistema de Equações em Diferença

$$|A_2 - r_i A_1| = 0 \; ; \; [A_2 - r_i A_1]Ci = 0 \; ; \; Xp;Yp = [A_1 - A_2]^{-1} B$$

Questões

1. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$y_1' = 3y_1 + 3y_2 - 7$$
$$y_2' = -y_1 - 2y_2 + 5$$

(Esta questão vale 2 pontos)

Resposta:

As raízes são 1 e -1. Fazendo $C_1 = 1$, temos que $C_2 = -0.33$ (raiz 1) e $C_2 = -1$ (raíz -1). As soluções particulares são -7 e 5.

Com esses dados temos que:

$$y_1 = k_1 e^{t} + k_2 e^{-t} - 7$$

$$y_2 = -0.33 k_1 e^{t} - k_2 e^{-t} + 5$$

2. No livro **Matemáticas para Economistas**, de Simon, C.P. e Blume, L., Bookman, 2004 (Primeira Edição), na página 688 eles apresentam uma questão de diagrama de fase no caso de um sistema de equações diferenciais. O sistema de resolução deles (eu considero) é bem mais complexo (e menos didático) que o que desenvolvi na sala de aula. O sistema em questão é:

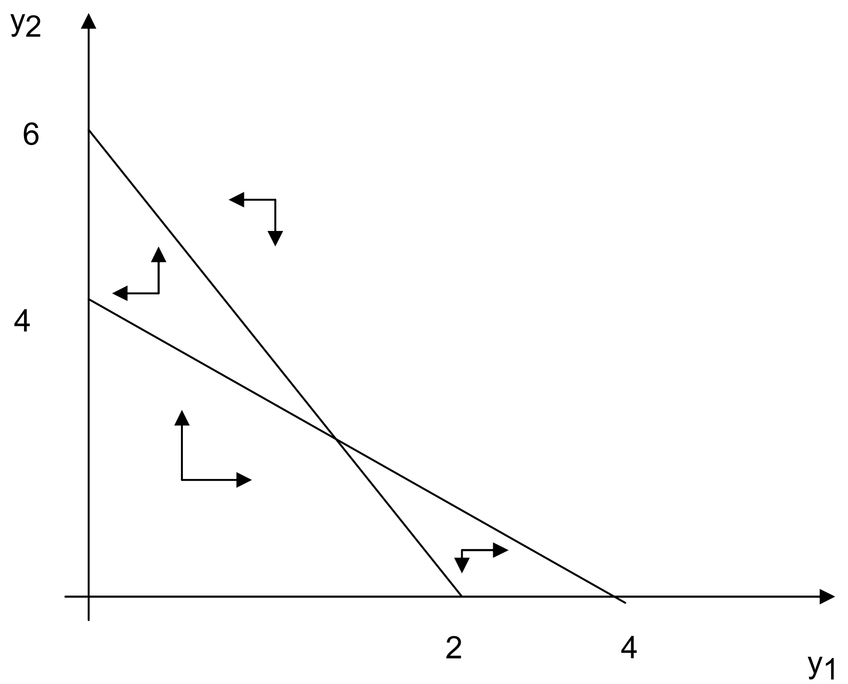
$$(1)\ \ y_1' = y_1\,(4-y_1-y_2)$$

$$(2)\ y_2' = y_2\,(6-y_2-3y_1)$$

Desenhe o diagrama de fase no primeiro quadrante (y_i>0)

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta:



3. Imagine que um científico está fazendo um experimento com ratos. Estes têm dois caminhos: A e B. O primeiro leva a um pedaço de queixo. O segundo a um pedaço de queixo que, quando tocado, produz uma descarga elétrica. O científico observou que os ratos apresentam um processo de aprendizagem. Dos ratos que escolheram, no primeiro dia, o primeiro caminho (A), 90% voltam a ele e 10% escolhem o segundo caminho (B). Dos que o primeiro dia escolheram B, 70% vão, no dia seguinte, caminho A e os 30% restantes retornam ao B.

Expresse o resultado encontrado pelo cientista em um sistema de equações em diferença.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: vamos denominar os ratos que vão ao caminho A no momento t como A_t e B_t no caso do caminho B no momento t. Temos, assim, que:

$$A_{t+1} = 0.9\, A_t + 0.7\, B_t$$

$$B_{t+1} = 0.1\, A_t + 0.3\, B_t$$

Em realidade, estamos diante de um processo de Markov. Mas a análise desses processos não foi abordada na sala de aula e fica para outra disciplina.

4. Resolva o seguinte sistema de equações em diferença:

$$x_t + 0.7\, x_{t-1} + 0.4\, y_{t-1} = 40$$

$$0 = -\, y_t - 0.575\, x_{t-1} - 0.5\, y_{t-1} - x_t + 6$$

$$x_0 = -24$$

$$y_0 = -32$$

(Esta questão vale 2 pontos)

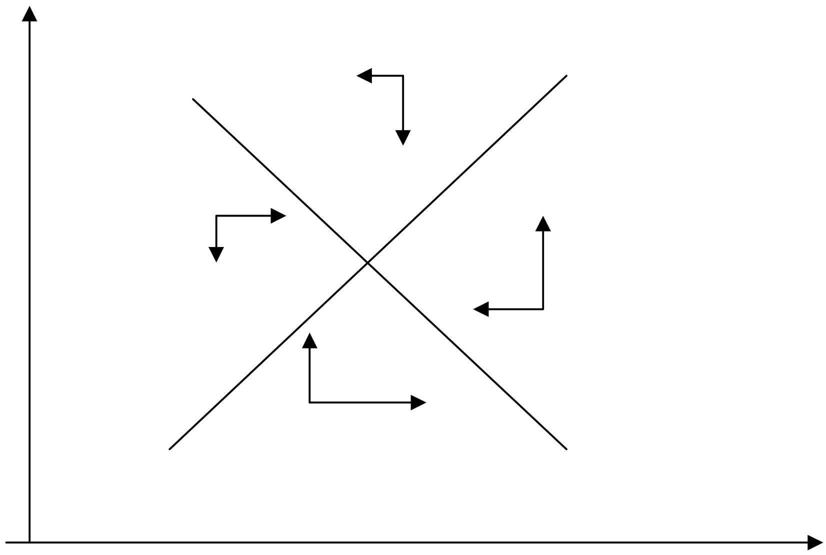
Resposta:

As raízes são -0.6 e -0.2. Fazendo, $C_2 = 1$ (na raiz -0.6) e $C_1 = 1$ na outra raiz temos que: C1 = -4 e C2 = -1.25, respectivamente. A solução particular é 30 e -27.5. Assim, temos que $k_1 = 3$ e $k_2 = 6$. A solução geral fica:

$$x_t = -12\,(-0.6)^t + 6\,(-0.2)^t + 30$$

$$y_t = 3\,(-0.6)^t - 7.5\,(-0.2)^t - 27.5$$

5. Observe o diagrama de fase esboçado no seguinte gráfico:



Qual das seguintes afirmações é correta (só uma é correta):

a) no sistema representado no gráfico anterior, ambas as raízes são positivas;
b) no sistema representado no gráfico anterior, ambas as raízes são negativas;
c) no sistema representado no gráfico anterior, uma raiz é positiva e outra negativa;
d) da observação do gráfico anterior não se pode concluir nada sobre o sinal das raízes;
e) todas as afirmações anteriores são falsas;

(Esta questão vale um ponto quando respondida de forma correta. Desconto um ponto quando a resposta esteja errada. Não conta ponto quando não respondida. Não precisa justificar a resposta, só indicar qual a afirmação correta)

Resposta: b)

6. Imagine o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$y_1' = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + b1$$

$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22}\, y_2 + b2$$

Em termos matriciais: **Y ‘ = A Y + B**

Avalie a seguinte afirmação: “No caso de $|A|<0$ o sistema será estável”

a) a afirmação é falsa;
b) a afirmação é verdadeira;
c) a partir, exclusivamente, do sinal do determinante de A não podemos concluir nada;

(Esta questão vale um ponto quando respondida de forma correta. Desconto um ponto quando a resposta esteja errada. Não conta ponto quando não respondida. Não precisa justificar a resposta, só indicar qual a afirmação correta)

Resposta: a). A justificativa é (o aluno não precisava justificar). As raízes são determinadas a partir da seguinte expressão: $r_i = Tr(A) +/- (Tr(A)^2 - 4\,|A|)^{0.5}$. Para que o sistema seja estável as duas raízes tem que ser negativas. Ou seja, tem que ser de igual sinal (além de negativas, lógico). No caso de ambas serem do mesmo sinal e negativas, teríamos que ter que Tr (A) <0 **e**

$$Tr(A) < (Tr(A)^2 - 4\,|A|^{0.5}.$$

Ou seja: $Tr(A)^2 < Tr(A)^2 - 4\,|A|$. Porém, como $|A|<0$, $-4^*|A|$ é positivo e, assim, $Tr(A)^2 - 4\,|A| > Tr(A)^2$. Teremos duas raízes que, além de serem reais, são de sinal oposto. Dessa forma, a afirmação de que quando $|A|<0$ o sistema será estável é falsa. Para que o sistema seja estável uma condição, necessária,mas não suficiente, é que $|A|>0$. No caso de $|A|>0$. **e** Tr (A) >0 ambas as raízes são negativas e o sistema é estável. No caso de $|A|>0$. **e** Tr (A) < 0 as duas raízes tem o mesmo sinal (positivas) e o sistema é inestável.