Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2012
Terceira Prova

Questões

1. Dado o seguinte sistema de equações diferenciais, determinar a estabilidade do mesmo mediante a avaliação do sinal dos auto-valores:

$$x' = -4x + y$$
$$y' = 3x - 2y$$

(Esta questão vale um ponto)

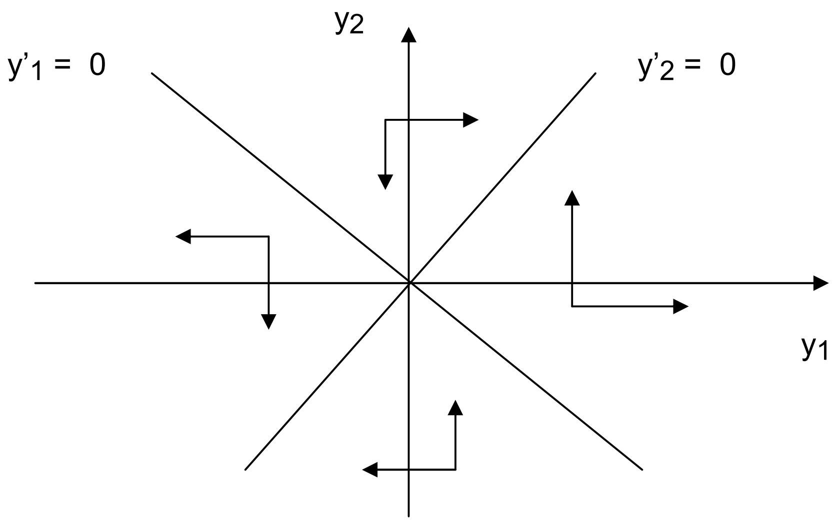
Resposta: os auto-valores são -1 e -5. Uma vez que ambos são negativos, o sistema é estável.

2. Desenhar o digrama de fase do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$y'_1 = 2\,y_1 + y_2$$
$$y'_2 = 2y_1 - y_2$$

(Esta questão vale dois pontos. Trabalhe com as áreas tanto negativas como positivas)

Resposta:



3. Questão da ANPEC/2011:

"Seja A a matriz 2x2 à qual está associado o sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes reais:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx+dy$$

Para a=b=d=1 e c=4, os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\mu = 3$."

(Deve ser respondido se essa afirmação é falsa ou verdadeira. Não precisa justificar a sua resposta, somente falar se é falsa ou verdadeira. No caso da resposta estar correta ganha um ponto, no caso da resposta ser incorreta desconto um ponto. O aluno que não responder não ganha nem perde pontos)

Resposta: falso. Os auto-valores são 3 e -1.

4. Vejamos o seguinte modelo econômico.

A primeira equação nos diz que a variação do capital (K') em cada momento do tempo é a diferença entre a poupança (s é a propensão a poupar e F a função de produção) e a depreciação (d) do capital (K). Formalmente temos que:

$$K'_t = s\,F(L_t;K_t) - d\,K_t$$

A acumulação de trabalho está dada pelo diferencial entre a produtividade marginal do trabalho (F_L) e o salário real (w). Formalmente temos que:

$$L'_t = L_t\ (F_L - w)$$

A função de produção (F) está dada pela seguinte expressão:

$$F_t = 4(K_t L_t)^{0.25}$$

Pergunta: desenhe o diagrama de fase.

(Esta questão vale três pontos. Desenhe o gráfico com o trabalho no eixo das y e o capital no eixo das x. Só considere as áreas positivas de ambas as variáveis, ou seja, unicamente o primeiro quadrante)

Resposta: fazendo $K'_t = 0$ temos que:

$$L_t = (d/4s)\ 4\ Kt\ 3$$

Fazendo $L'_t = 0$ temos que:

$$L_t = (1/w)^{4/3} K_t^{\ 1/3}$$

Os valores de equilíbrio são:

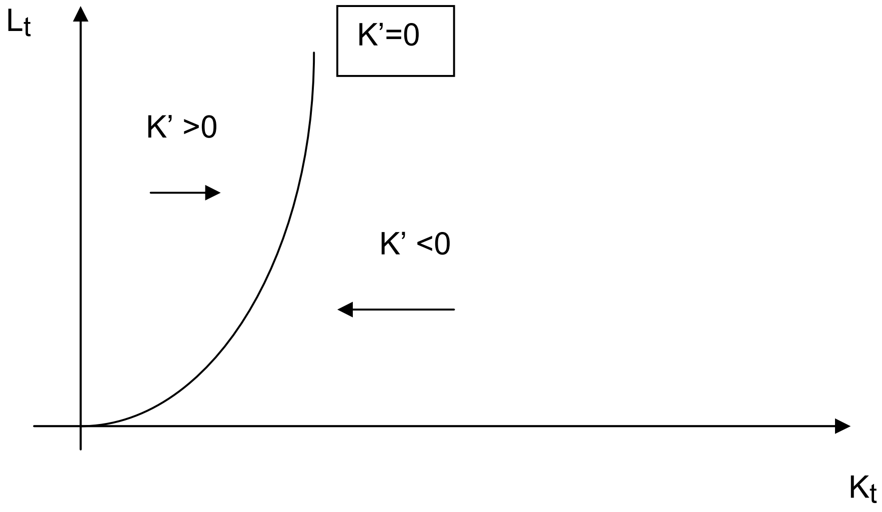
$$K^* = (4s/d)^{1.5}\ w^{-0.5}$$

$$L^* = (4s/d)^{0.5}\ w^{-1.5}$$

Quando $K' = 0$ temos a expressão:

$$L_t = (d/4s)^4 K_t^{\ 3}$$

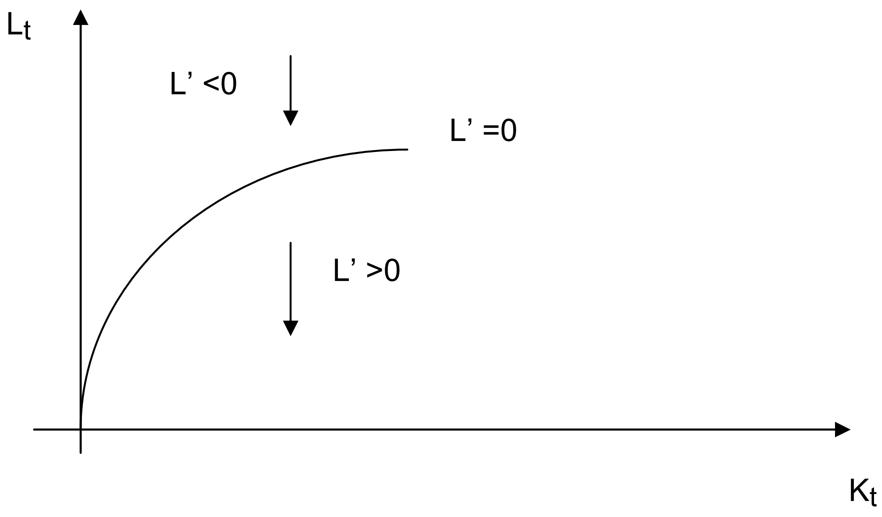
Em termos gráficos:



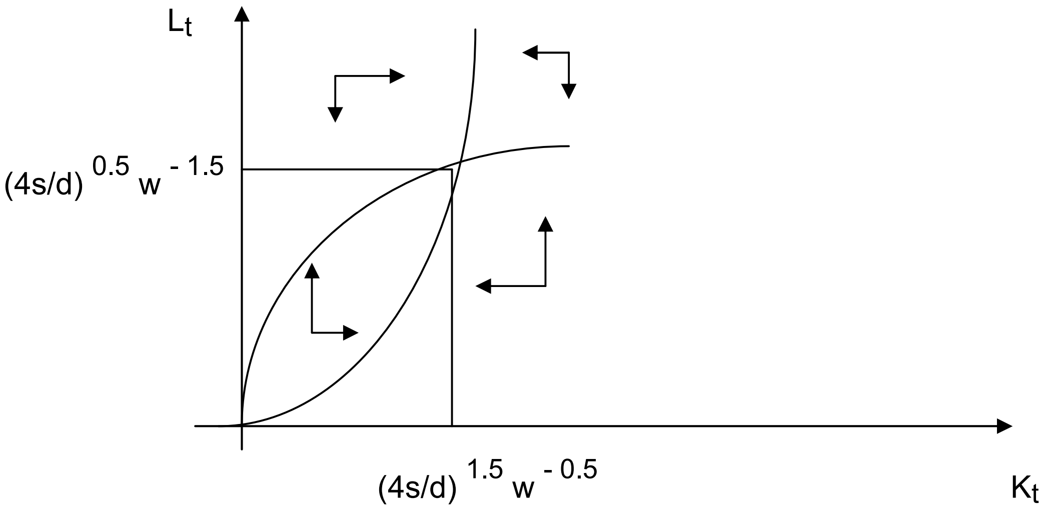
Quando L_t' = 0 temos a seguinte expressão:

$$Lt = (1/w)^{4/3} K_t^{1/3}$$

Graficamente:



Juntando os dois gráficos temos que:



5. Resolver o seguinte sistema de equações em diferença:

$$x_t + 0.5\, x_{t-1} - 0.5\, y_{t-1} = 5$$

$$y_t - x_{t-1} = 0$$

$$x_0 = 8$$

$$x_{-1} = 8$$

(Esta questão vale três pontos. Cuidado com as condições iniciais.)

Resposta: os auto-valores do sistema são -1 e 0.5. O auto-vetor associado ao auto-valor -1 é $C_1 = - C_2$. Fazendo $C_1 = 1$ deduzimos que $C_2 = -1$. O auto-vetor associado ao auto-valor 0.5 será $C_1= 0.5\, C_2$. Fazendo $C_1 = 1$ temos que $C_2 = 2$. A solução particular é um vetor (5;5). Dessa forma temos que:

$$x_t = k_1\, (-1)^t + k_2\, (0.5)^t + 5$$

$$y_t = k_1\, (-1)^t + k_2\, (0.5)^t + 5$$

Agora, para determinar os valores de ki vamos às condições iniciais. Sabemos que $x_0 = 8$. Assim, pela primeira equação vamos ter:

$$8 = k_1 + k_2 + 5 \text{ ou } k_1 + k_2 = 3$$

Por outra parte, sabemos que $x_{-1} = 8$ e que $y_t = x_{t-1}$. Assim, temos que:

$$8 = k_1 (-1)^{-1} + k_2 (0.5)^{-1} + 5 \text{ ou } 3 = - k_1 + 2 k_2$$

Dessa forma, temos duas equações com duas incógnitas:

$$k_1 + k_2 = 3$$

$$-k_1 + 2 k_2 = 3$$

Os valores dos k_i serão: $k_1 = 1$ $k_2 = 2$.

Então, a resposta será:

$$x_t = (-1)^t + 2 (0.5)^t + 5$$

$$y_t = - (-1)^t + 4 (0.5)^t + 5$$