Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2013
Terceira Prova

Resolução de um Sistema de Equações Diferenciais

$|A_2 - r_i A_1| = 0$; $[A_2 - r_i A_1]Ci = 0$; $Xp;Yp = -A_2^{-1} B$

Resolução de um Sistema de Equações em Diferença

$|A_2 - r_i A_1| = 0$; $[A_2 - r_i A_1]Ci = 0$; $Xp;Yp = [A_1 - A_2]^{-1} B$

Questões

1. Sendo x(t) e y(t), resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$x' = x+2y+3$$
$$y' = -y+4x+9$$

(Esta questão vale 2 pontos)

Resposta:

As raízes são -3 e +3. Com a raiz 3 temos que $C_1 = C_2$, e fazendo $C_1=1$ temos que temos que $C_2 = 1$. No caso da raiz -3, temos que $C_2 = -2\ C_1$, e fazendo $C_1 = 1$, temos que $C_2 = -2$. Os valores da solução particular são 7/3 e 1/3.

Com esses dados temos que:

$$x(t) = k_1 e^{3t} + k_2 e^{-3t} + (7/3)$$

$$y(t) = k_1 e^{3t} - 2 k_2 e^{-3t} + (1/3)3.5$$

2. Dado o seguinte sistema de equações diferenciais, desenhe o digrama de fase:

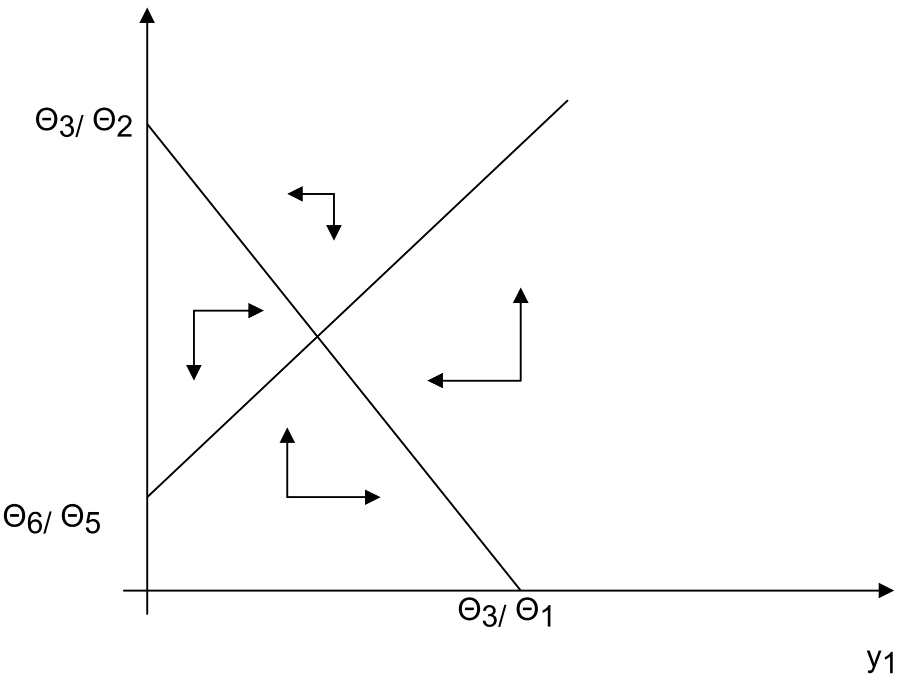
(1) $y_1' = -\Theta_1 y_1 - \Theta_2 y_2 + \Theta_3$

(2) $y_2' = \Theta_4 y_1 - \Theta_5 y_2 + \Theta_6$

Desenhe o diagrama de fase no primeiro quadrante (y_i>0). Todos os Θ são positivos (Θ_i >0, $\forall$ i).

(Esta questão vale três pontos)

Resposta:



3. J.P. Bénassy, no livro **Macroeconomic Theory** (Oxford University Press, 2011), analisa o Modelo de Ramsey e chega ao seguinte sistema de equações diferenciais (ver página 149):

$$k'(t) = f(k) - (\delta + \eta)k(t) - c(t)$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{f' - \rho - \delta - \eta}{\theta(c)}$$

Onde: c(t) = consumo; K(t) = capital *per-capita*; f(k)= a função de produção e f'>0 e f''<0. Os outros símbolos são parâmetros positivos.

Pergunta: desenhe o diagrama de fase (coloque no eixo das ordenadas c(t) e no eixo das abscissas k(t)).

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: na sala de aula fizemos esse problema, dando valores a certos parâmetros. Eu não falei que era o Modelo de Ramsey uma vez que o objetivo do curso não é estudar teoria senão técnicas.

Fazendo c'=0, temos que a segunda equação do sistema fica:

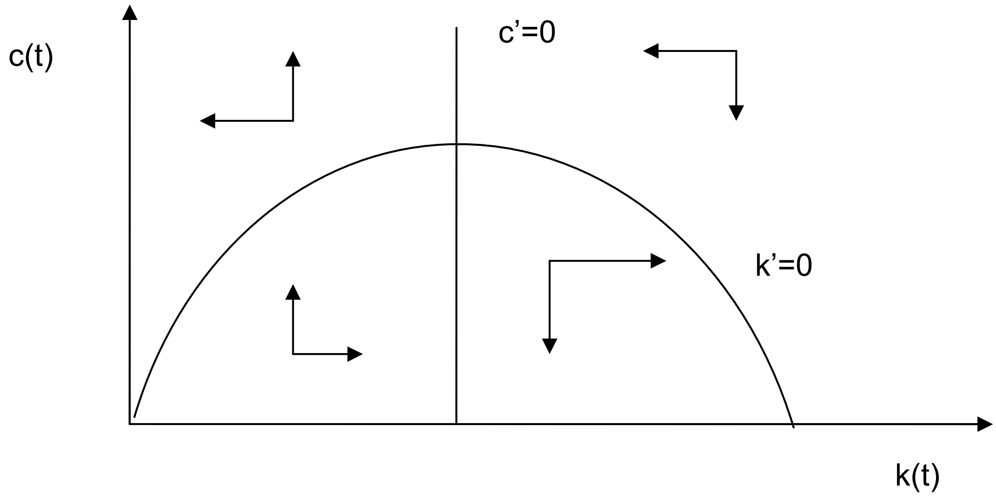
$$f' = \rho + \delta + \eta$$

que é uma reta.

Fazendo k'=0, temos que:

$$f(k) - (\delta + \eta)k(t) = c(t)$$

Lembrando que f'>0 e f''<0, temos uma parábola côncava. O gráfico seria:



4. Resolva o seguinte sistema de equações em diferença:

$$p_t = 2\,p_{t-1} + 2\,y_{t-1} + 1$$

$$y_t = 3\,p_{t-1} + y_{t-1} - 3$$

(Esta questão vale 2 pontos)

Resposta:

As raízes são 4 e -1. Na raíz 4 temos que $C_1 = C_2$ e podemos normalizar em 1.

Na raiz -1 temos que 1.5 C_1 = - C_2 e normalizando em C_1 = 1, temos que C_2 = -1.5. Na solução particular temos um vetor 1 e -1. A solução geral fica:

$$x_t = k_1 (4)^t + k_2 (-1)^t + 1$$
$$y_t = k_1 (4)^t - 1.5\,k_2 (-1)^t - 1$$

5. Imagine um mercado em concorrência imperfeita no qual observamos uma guerra de preços. Nesse mercado existem duas firmas e cada uma estabelece, no dia de hoje, um preço 10% inferior ao fixado pela sua rival no dia anterior.

Descreva essa situação mediante um sistema de equações em diferença e resolva.

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: Vamos chamar as duas firmas existentes no mercado de x e y. denominemos de P_{xt} o preço da firma x no dia t e P_{yt} o preço fixado pela firma y no dia t. O sistema seria:

$$P_{xt} = 0.9\, P_{yt-1}$$

$$P_{yt} = 0.9\, P_{xt-1}$$

As raízes são +/- 0.9. Com a raiz +0.9 temos que $C_1 = C_2$ e normalizando temos $C_1 = C_2 = 1$. Para a raiz -0.9 temos que $C_1 = -C_2$ e normalizando temos $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$. A solução desse sistema vai ficar:

$$P_{xt} = k_1\,(0.9)^t + k_2\,(-0.9)^t$$
$$P_{yt} = k_1\,(0.9)^t - k_2\,(-0.9)^t$$