Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Métodos Matemáticos em Ciências Sociais Avançados.
Professor: Carlos Alberto
Período: 1/2012
Quinta Prova

Questões

1. Uma firma está diante a seguinte função de demanda:

$P = 12 – \ln Q$

Onde: P = preço e Q = quantidade (Q>1).

A função de custos totais dessa firma está dada pela seguinte expressão:

$CT = 3 Q$.

Determine a quantidade que maximiza o lucro.

(Esta questão vale dois pontos e devem ser avaliadas as condições de primeira e segunda ordem).

Resposta: $Q = e^{8} \approx 2.981$. A condição de segunda ordem é: $-2/Q <0$, o que assegura que e^{8} é máximo.

2. Dada a seguinte função:

$$z (x;y) = \exp (2x^{2}-12x-2xy+y^{2}-4y)$$

Encontrar os pontos críticos (candidatos a máximo ou mínimo) e caracterizar os mesmos (ou seja, encontrar as condições de primeira e segunda ordem).

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: x = 8 e y = 10. Uma vez que $z_{xx} >0$ e $z_{xx}*z_{yy} - (z_{xx}*z_{yy)} >0$, (8;10) é um mínimo.

3. Diagonalize a seguinte matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Prove (sabendo que P^{-1} A P = D) que os resultados encontrados são corretos.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: os autovalores são -1 e 3. Os autovetores são: (-1;1) e (1;1). (Escolhi x_2 = 1 e x_1 = 1, os resultados podem ser diferentes normalizando de outra forma).

4. Estudamos na aula que, dado uma matriz A, podemos encontrar a expressão:

$$P^{-1} A P = D$$

Onde P é uma matriz cujas colunas são os auto-vetores de A e D é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal está constituída pelos autovalores de A. Partindo da expressão anterior, é fácil provar que:

$$A = P D P^{-1}$$

Supondo que k seja um escalar, temos que

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

Vamos relacionar essas expressões com o conteúdo da prova anterior. Nos processos markovianos, temos que, sob certas condições, no longo prazo, no steady-sate ou quando $t \rightarrow \infty$, o sistema tende a um equilíbrio. Assim, vamos utilizar as relações anteriores para encontrar o equilíbrio do seguinte problema.

Uma observação permite concluir que, do total de fumantes, 65% deles serão fumantes no período seguinte. Daqueles que não fumam em t_0, 85% continuarão não fumantes no período seguinte.

Supondo que, em t_0, 50% da população fumava, no longo prazo (ou no steady-state ou quando $t \rightarrow \infty$), qual será a distribuição da população entre fumantes e não-fumantes ?

(Esta questão vale quatro pontos)

Resposta: os auto-valores de A são 1 e 0.5. Quando $t \rightarrow \infty$, 30% da população será fumante e 70% não fumante.