Nota Didática 3

TDE

Carlos Alberto

O Modelo de Solow

1. A Função de Produção.

a) Produtividades Marginais.

O Modelo de Solow (MdeS) é a denominação dada ao Modelo Neoclássico (mainstream) de crescimento. Como tal, adota todas as características do modelo canônico que vocês estudaram na maioria das disciplinas do curso (especialmente Microeconomia).

O alicerce desse paradigma é a Função de Produção. Vamos, por simplicidade algébrica e acompanhando a maioria das formulações, assumir que só temos dois fatores de produção: capital (K) e trabalho (L). Assim, temos que o produto (ou renda) de um país está em função da quantidade de capital e trabalho disponível:

$$Y = F(K;L) \qquad (1)$$

As produtividades marginais (aumentando um fator quando o outro permanece constante) são positivas, porém decrescentes:

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0; \frac{\partial F}{\partial K} > 0; \qquad (2)$$

Podemos definir essas derivadas parciais como sendo as produtividades marginais do L (PMaL) e a produtividade marginal do K (PMaK). A produtividade marginal decrescente pode ser representada como:

$$\frac{\partial PMaL}{\partial L} < 0; \frac{\partial PMaK}{\partial K} < 0 \qquad (3)$$

Não podem confundir produtividades marginais decrescentes com retornos decrescentes. Retornos significa que aumentamos todos os fatores de produção (neste caso capital e trabalho simultaneamente). Produtividades marginais significa que aumentamos um fator e os demais permanecem constantes.

As produtividades marginais se alteram positivamente no caso de aumentar o outro fator de produção. Exemplo, a produtividade marginal do trabalho aumenta no caso de aumentar a quantidade de K. Ou seja, se queremos elevar a produtividade marginal do trabalho podemos (mantendo L constante, lembremos que estamos operando com derivadas parciais) incrementar K. Um raciocínio similar é válido no caso da produtividade marginal do K. Em termos algébricos:

$$\frac{\partial PMaL}{\partial K} > 0; \frac{\partial PMaK}{\partial L} < 0 \qquad (4)$$

Contudo, esses incrementos são decrescentes. Esta hipótese é muito importante uma vez que será crucial para explicar a tendência à estagnação da renda per capita no MdeS. Formalmente:

$$\frac{\partial^2 PMaL}{\partial L^2} < 0; \frac{\partial^2 PMaL}{\partial K^2} < 0 \qquad (5)$$

Resumindo: dado um estoque de L (ou de K), se agregamos unidades de trabalho (ou de K) aos outros fatores o PIB de um país vai aumentar, só que as contribuições desses incrementos vão ser cada vez menores. Aplica-se a mesma hipótese às produtividades marginais.

b) Retornos Constantes de Escala.

A Função de Produção tem retornos constantes de escala ou, em termos mais formais, é uma função homogênea de grau 1. Se por exemplo, duplicamos as quantidades de K e L, a produção também será duplicada:

$$F(\wedge K; \wedge L) = \wedge F(K;L) \qquad (6)$$

c) **Produtividades Marginais = remuneração dos fatores.**

Assumindo que estamos trabalhando em mercados concorrenciais e a função objetivo da firma é maximizar lucros, essa maximização só será atingida quando as produtividades marginais sejam iguais à remuneração dos fatores, w para o salário e r para o capital. Pode-se provar (não vamos fazer aqui) que a remuneração do capital é a taxa de juros. Assim:

$$PMaL=w; PMaK=r \tag{7}$$

d) Condições de Inada.

$$\lim_{K\to\infty} F_K \to 0;\ \lim_{K\to 0} F_K \to \infty;$$

(8)

$$\lim_{L\to\infty} F_L \to 0;\ \lim_{L\to 0} F_L \to \infty;$$

Vamos ver o que as condições de Inada significam. Imaginemos que estamos em um país muito pobre, com pouco capital. Um aumento de K tende a ter um impacto muito importante na produtividade marginal do trabalho. Na medida em que o K vai aumentando esse impacto vai caindo. No caso de esse país chegar a ser rico (muito capital), o corolário de elevações em K vai ser negligenciável. Podemos, logicamente, assumir que estas condições tem o mesmo significado que a hipótese das produtividades marginais decrescentes.

e) Homogeneidade da Função de Produção e PIB per capita.

Sabemos que o relevante não é o PIB total senão o PIB per capita.

Podemos imaginar que obtemos o PIB per capita multiplicando a Função de Produção por 1/L. Ou seja, nosso parâmetro ʎ é 1/L. Uma vez que a Função de Produção é homogênea de grau, temos que:

$$Y (1/L) = F(K/L; L/L)=F(K/L;1) \tag{9}$$

Definindo y = Y/L (PIB per capita) e k = K/L (capital per capita), temos que:

$$y = f(k) \tag{10}$$

Dado que na medida em que agregamos capital a um dado estoque de assalariados os impactos são positivos, porém decrescentes:

$$f' > 0;\ f'' < 0 \quad (11)$$

f) ***Investimento, Poupança e Taxa de Poupança (Exógena).***

O MdeS mais simples não tem governo nem está aberto aos fluxos financeiros ou de bens com o exterior. Ou seja, estamos em uma economia fechada e sem governo. Dessa forma S=I. Poupança igual a investimento. Esse é o equilíbrio no mercado de bens. A poupança é uma fração (s) da renda (y). Assim:

$$sY = I \quad (12)$$

Desde outra perspectiva: se a poupança é uma fração constante do nível de renda e poupança é igual a investimento o corolário óbvio é que o investimento é uma fração constante da renda.

A taxa de poupança é exógena ao modelo.

A equação anterior a podemos expressar em termos per capita e nada muda:

$$sy=(I/L) \quad (13)$$

g) Crescimento da População.

A população cresce a uma taxa constante e exógena que vamos representar por μ. Ou seja:

$$P(t) = P_0\, e^{\mu t} \quad (14)$$

2. O Modelo.

Uma vez que a renda per capita depende do capital per capita (f(k)) a resolução do modelo passa, inexoravelmente, por explicar a trajetória de k, uma vez que é essa variável a que vai explicar o desempenho da renda per capita. Em outros termos: qual é a renda per capita de um pais? Dada a Função de Produção, o k. (Estamos supondo que a tecnologia é constante, vamos do mais simples para o mais complicado)

a) Estoque de Capital em cada momento do tempo.

Em cada momento do tempo t, o estoque de K é o estoque de capital que foi herdado menos a depreciação mais o fluxo de capital que foi agregado pelo investimento. Em termos formais:

$$K_{t+1} = (1-\delta)\, K_t + I_t \qquad (15)$$

Onde δ = taxa de depreciação.

Rearranjando a expressão anterior temos que:

$$K' = K_{t+1} - K_t = \delta\, K_t + I_t \qquad (16)$$

Onde K' = variação de K.

b) Trajetória do Capital Per Capita.

Mas nosso objetivo é compreender a trajetória do capital per capita que, em última instância vai ser a variável determinante da renda per capita.

Por definição sabemos que:

$$k = K/L = K\, L^{-1} \qquad (17)$$

A variação de k será sua derivada. Vamos derivar a expressão anterior:

$$k' = K'\, L^{-1} - K\, L^{-2}\, L' \qquad (18)$$

Ou seja:

$$k' = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} \qquad (19)$$

Sabemos que K/L, por definição, é k e que L'/L é μ (a taxa de variação da população). Assim, a expressão anterior fica:

$$k'(t) = \frac{K'}{L} - k(t)\,\mu \qquad (20)$$

Vamos substituir K' pelo valor que já encontramos ($\delta K_t + I_t$):

$$k'(t) = \frac{\delta\ \mathrm{Kt} + \mathrm{It}}{L} - k\ \mu = \frac{-\delta Kt}{L} + \frac{It}{L} - k\mu \qquad (21)$$

Se K/L=k e I/L= sy=sf(k), a igualdade anterior pode ser escrita como:

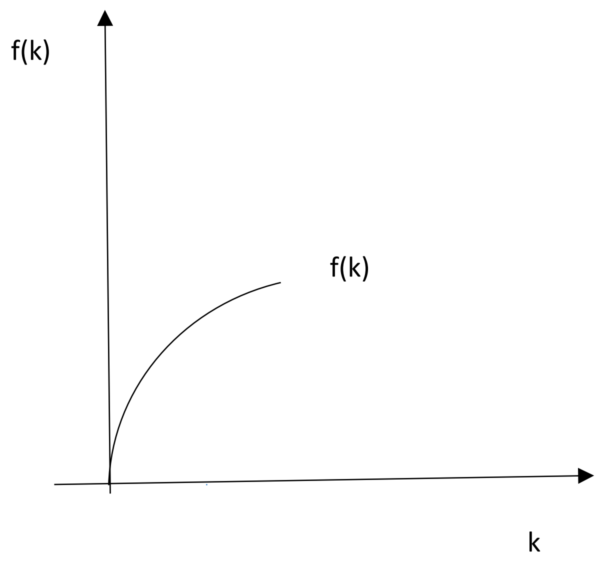
$$\boldsymbol{k'(t) = sf(k(t)) - (\mu + \delta)k(t)} \qquad (22)$$

Equação Fundamental de Solow

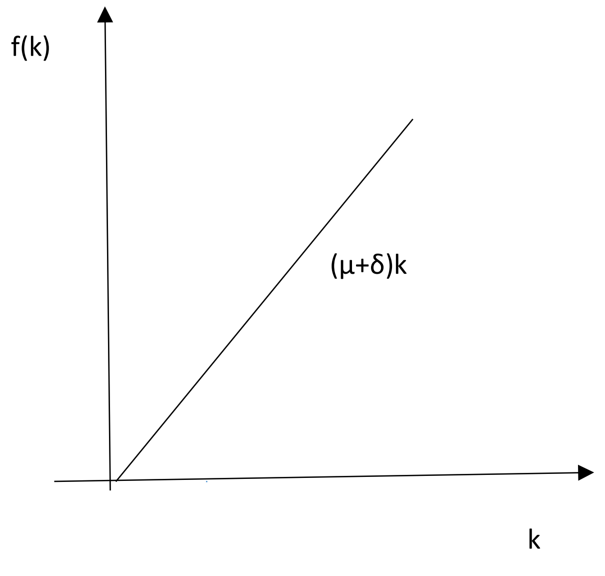
3. Dinâmica do Modelo.

a) Resolução do Modelo.

Sabemos que s, δ e μ são exógenas e constantes. Ou seja, são parâmetros da expressão anterior. Assim, k' vai depender de f(k) e de k e ambas dependem de t. No transcorrer do tempo k vai mudar porque muda a acumulação de capital via investimento. Ou seja, tem investimento e o resultado natural é aumento de I. Sucede que o impacto de k sobre y (renda) vai se alterando uma vez que a f'>0 mas f''<0. Em outras palavras, f(k) é côncava. As contribuições que o investimento trás à elevação do PIB são cada vez menores. Contudo (μ+δ) é uma linha reta, seu efeito é constante, não decai com o transcorrer do tempo. No começo (quando k está próximo de 0) os aumentos do capital per capita têm um impacto muito acentuado na renda per capita (lembrem as Condições de Inada). Depois esse impacto vai caindo. Em termos gráficos:



Interagindo com essa função temos (μ+δ) k, que é uma reta:



b) Equilíbrio.

Lembremos a definição de equilíbrio. Significa um estado que não muda no tempo. Ou seja, que a derivada é zero.

Lembremos, agora, que temos que caracterizar um equilíbrio. Os economistas tentam duas coisas: determinar o equilíbrio e avaliar se o mesmo é estável ou não. No caso de ser estável, um choque exógeno distancia a variável do equilíbrio, mas, na medida em que passa o tempo, retorna. Neste caso se caracteriza o equilíbrio como sendo estável. Na alternativa da variável não voltar ao equilíbrio, o mesmo é instável.

Se o que define o equilíbrio é sua derivada (=0), no caso que estamos analisando seria quando k'=o. Ou seja, seria o que k que:

$$0 \ = sf(k(t)) - (\mu + \delta)k(t) \tag{23}$$

Ou:

$$s\ f(k_{ss}) = (\mu+\delta)k_{ss}$$

Vamos chamar o k de equilíbrio ou de steady-state de k_{ss}. Dado que temos um k_{ss} também teremos um y_{ss} e um consumo c_{ss}. (Lembremos que consumo é (1–s)y.

c) Estabilidade do Equilíbrio.

Temos várias formas de caracterizar a estabilidade do equilíbrio. Uma pode ser mediante a avaliação da equação diferencial (22). Uma vez que muitos alunos não estudaram equações diferenciais, não vamos escolher essa alternativa. Uma segunda possibilidade é empírica. Partindo de valores abaixo e acima do equilíbrio vemos se a trajetória converge ao mesmo. No caso de convergir, o equilíbrio é estável e no caso de divergir, é instável. Mediante simulações no Excel é fácil realizar este exercício empírico e fazeremos nas aulas.

Uma terceira possibilidade é mais intuitiva ou analítica a partir da observação de (22). Na medida em que f(k) é côncava os incrementos vão caindo no tempo na medida em que k se eleva. Dessa forma antes do equilíbrio (s f(k))> (μ+δ)k), se atinge o equilíbrio e depois (s f(k)) < (μ+δ)k). Ou seja, o equilíbrio vai ser estável. Além do steady-state as contribuições do investimento (s f(k)) não conseguem compensar a depreciação somado aos requerimentos de capital que demanda o aumento da população. Dessa forma, o k(capital por trabalhador) cai. Fenômeno contrário no caso de a base estar aquém do steady-state.

Dessa forma, as economias tenderiam à estagnação na renda por trabalhador. Alterar o equilíbrio significa alterar os parâmetros (s, μ, δ). No caso de a taxa de aumento da população cair, ou de a poupança elevar-se, por exemplo, o steady-state se elevaria. Contudo, essa elevação seria transitória e a estagnação retornaria. Esse destino seria inexorável e só transitoriamente poderia se fugir dele. Uma outra possibilidade seria o desenvolvimento tecnológico, mas vamos deixar essa possibilidade para mais adiante.

d) Um Exemplo com a Função de Produção Cobb-Douglas.

Assumamos uma Função de Produção Cobb-Douglas, muito usada pelos economistas:

$$Y=F(K;L)= K^{\alpha} L^{(1-\alpha)} \text{ com } 0<\alpha<1 \qquad (24)$$

Em termos de produto por trabalhador:

$$y=k^{\alpha} \qquad (25)$$

Reproduzindo (22) temos que:

$$k'= s\, k^{\alpha} - (\mu+\delta)\, k \qquad (26)$$

$$k'=0 \rightarrow k_{ss} = \left(\frac{s}{\delta+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow y_{ss} = \left(\frac{s}{\delta+\mu}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (27)$$