

Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Matemática.
Professor: Carlos Alberto
Período: 1/2026
P1.

1. Assuma que $K(t)$ é a quantidade de capital disponível em uma economia no momento t . Assuma que esse capital se deprecia a uma taxa δ e o investimento (exógeno) está dado por I .

Assuma os seguintes valores: $I = 500$; $\delta = 0.10$; $K(0) = 500$.

- i) Formule a equação diferencial desse problema e resolva;
- ii) Determine o equilíbrio;
- iii) Caracterize o equilíbrio.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: $K(t) = 5.000 - 1.500 e^{-0.1t}$. Equilíbrio = 5.000; Equilíbrio estável.

2. Assuma que a economia tem 2 setores (Indústria-I e Serviços-S). O capital, em cada momento do tempo, em cada um desses setores, pode ser representado por $K_I(t)$ e $K_S(t)$. Entre um momento e outro do tempo, assuma a seguinte evolução. O capital da Indústria se deprecia em uma magnitude de 3 por unidade presente. Ou seja, a cada instante, 3 unidades de capital industrial são perdidas para cada unidade existente. O capital de Serviços se deprecia mais lentamente, em uma magnitude de 2 por unidade. Cada unidade de capital em Serviços contribui com +1 unidade por período à variação do capital industrial. Pode representar, por exemplo, serviços de logística, financiamento ou consultoria que aumentam a capacidade produtiva da indústria. Indústria ajuda Serviços ainda mais. Cada unidade de capital industrial gera +2 unidades por período à variação do capital nos Serviços. Pode refletir a demanda que fábricas criam por serviços de manutenção, transporte e comercialização.

Perguntas:

- i) Escreva a matriz de transição (do capital em cada setor);
- ii) Caracterize a trajetória (o sistema converge ou não).

(Esta questão vale três pontos)

Resposta:

A matriz de transição é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Para caracterizar o equilíbrio temos que encontrar os auto-valores, que são: -1; -4.

Uma vez que os dois são negativos teremos a convergência a um ponto de equilíbrio (a questão não pede o ponto de equilíbrio).

3. Um mercado possui preço ($P(t)$) e quantidades ($Q(t)$) que evoluem de forma interdependente segundo as seguintes expressões:

$$(i) P'(t) = -2P(t) + Q(t) + 4$$

$$(ii) Q'(t) = 3P(t) - 3Q(t) + 3$$

A condição inicial é: $P(0) = 5$; $Q(0) = 1$.

Perguntas:

- Determine o equilíbrio do modelo;
- Desenhe o diagrama de fase;
- A partir do ponto inicial, o sistema converge ao equilíbrio ou não? Provar a convergência ou não a partir da leitura do diagrama de fase e analiticamente (mediante os auto-valores)

(Esta questão vale cinco pontos)

Resposta: a) equilíbrio do modelo é: $P = 5$; $Q = 6$;

b) o diagrama de fase:

